Examen Semestriel N°1

Matière	: Algorithmique & Architectures Parallèles	**Date**	: 7/1/2008
Enseignant	: Wahid NASRI	**Durée**	: 2h
Sections	: MI4 RI, GL & MM	**Nb. Pages**	: 3
Documents	: Non autorisés	**Barème**	: 3+4+5+8

N.B. Toutes vos réponses devront être expliquées et justifiées. Soyez clairs et précis.

Exercice 1

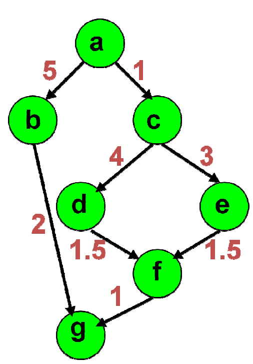
Soit l'algorithme suivant :

```
Pour i = 1 , n
    Tâche Ti,i : X(i) = B(i) / A(i,i)
    Pour j = i+1 , n
        Tâche Ti,j : B(j) = B(j) – A(j,i) * X(i)
    Fin
Fin
```

1. Quel est le rôle de cet algorithme ?
2. Représenter le graphe de tâches correspondant à la décomposition en tâches proposée.

Exercice 2 (1+0.5+2.5+1)

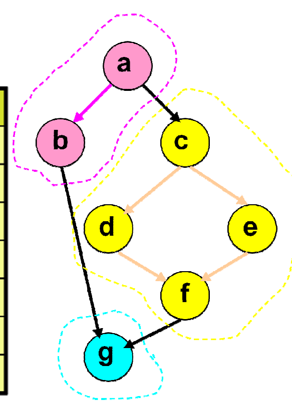
On se propose d'appliquer un algorithme de clustering sur le graphe de tâches (G). Les coûts des différentes tâches (resp. communications) sont représentés dans la table (T) (resp. sur les arcs du graphe).



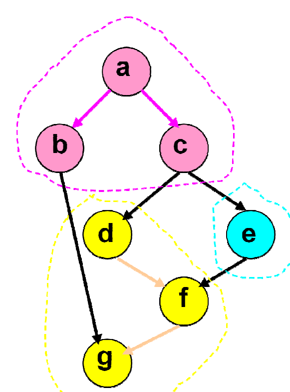
(G)

Tâche	Tps d'exé
a	1
b	5
c	1
d	2
e	2
f	1
g	1

(T)



(C1)



(C2)

Soient les deux clustering (C1) et (C2) du graphe (G). Montrer que l'ordonnancement du :

1. Clustering (C1) produit un temps d'exécution total = 9 sur 2 processeurs et 10 sur 3 processeurs.
2. Clustering (C2) donne un temps d'exécution total = 10.5 sur 3 processeurs.

Exercice 3

On se propose de distribuer des sous-matrices carrées de taille n/2 dans un environnement d'exécution parallèle constitué de sept processeurs homogènes, notés $P_1,P_2,...,P_7$ connectés par des liens bidirectionnels homogènes. On suppose qu'une communication entre tout couple de processeurs se fait en une seule étape et que le modèle de communication utilisé est 1-Port.

Les sous-matrices à distribuer sont présentées dans la table 1 ci-dessous.

Processeur	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
Sous-matrices à distribuer	A_1 , A_4 B_1 , B_4	A_2 , A_4 B_3 , B_4	A_4 B_1 , B_3	A_1 , A_2 B_4	A_3 , A_4 B_1	A_1 B_2 , B_4	A_1 , A_3 B_1 , B_2

Table 1. Sous-matrices à placer sur les 7 processeurs

Il est à préciser que les sous-matrices sont obtenues suite à des décompositions de deux matrices A et B initialement présentes sur le processeur P_1.

On vous demande de :

1- Proposer une distribution des sous-matrices sur les processeurs ne dépassant pas 9 étapes de communications. Une étape ici peut correspondre à des communications entre plusieurs couples de processeurs simultanément.

En déduire le coût de cette distribution en supposant un modèle de communication linéaire.

2- Proposer maintenant une autre distribution réduisant le nombre d'étapes de communications.

Exercice 4

Enoncé

On se propose d'étudier un algorithme récursif pour multiplier en parallèle deux matrices carrées, à savoir celui de Winograd. Cette méthode utilise le paradigme « Diviser pour Régner ». Elle ramène le produit, noté $MM(n)$, de deux matrices carrées (n,n) en plusieurs instances de problèmes de tailles plus petites, ce qui permet de réduire le nombre de multiplications élémentaires de $O(n^3)$ à seulement $O(n^\alpha)$ où α=log7.

Nous présentons dans ce qui suit l'algorithme dans le cas où la taille n s'écrit $n=2^k$(k entier strictement positif). Soient A, B et C trois matrices carrées de taille n. Ici, $MM(n)$ désigne le calcul du produit matriciel $C=AB$. On partitionne chacune des trois matrices en quatre sous-matrices $(n/2,n/2)$ comme suit :

$$A = \begin{array}{|c|c|} \hline A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \\ \hline \end{array} \qquad B = \begin{array}{|c|c|} \hline B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \\ \hline \end{array} \qquad C = \begin{array}{|c|c|} \hline C_{11} & C_{12} \\ \hline C_{21} & C_{22} \\ \hline \end{array}$$

L'algorithme de Winograd procède comme suit.

On calcule les sept matrices, $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7$, de taille $m=n/2$, suivantes :

$M_1 = A_{11} \ast B_{11}$, $M_2 = A_{12} \ast B_{21}$, $M_3 = A_{22} \ast (B_{11} - B_{12} - B_{21} + B_{22})$,
$M_4 = (A_{11} - A_{21}) \ast (B_{22} - B_{12})$, $M_5 = (A_{21} + A_{22}) \ast (B_{12} - B_{11})$, $M_6 = (A_{11} + A_{12} - A_{21} - A_{22}) \ast B_{22}$,
$M_7 = (A_{11} - A_{21} - A_{22}) \ast (B_{11} + B_{22} - B_{12})$.

On en déduit les matrices C_{ij} :

$C_{11} = M_1 + M_2$, $C_{12} = M_1 + M_5 + M_6 - M_7$, $C_{21} = M_1 - M_3 + M_4 - M_7$, $C_{22} = M_1 + M_4 + M_5 - M_7$

On aboutit alors à 7 multiplications matricielles $MM(m)$ et 15 additions matricielles $AM(m)$ de matrices (m,m). Pour dériver la méthode effective, on applique récursivement la même décomposition sur chacun des sept sous-problèmes de multiplication matricielle $MM(m)$, et ainsi de suite jusqu'à un certain seuil choisi à l'avance.

Travail demandé

1- A partir des formules décrites précédemment pour une étape de la méthode, proposer une décomposition en tâches de l'algorithme séquentiel de Winograd.

2- En déduire le graphe de tâches correspondant. Faire en sorte que sa profondeur soit minimale afin de minimiser le temps d'exécution de l'algorithme parallèle.

3- Déterminer le coût de l'algorithme parallèle sans communications.

4- En utilisant le principe "*Dupliquer pour Paralléliser*", proposer une amélioration du graphe de tâches.

Conclure.